# Производная функции в одной точке

Производная функции в одной точке — это численная характеристика, которая описывает скорость изменения функции в данной точке. Она равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

## Геометрический смысл

Если представить график функции как кривую, то производная в точке $x_0$ показывает наклон касательной к графику в этой точке. Это помогает понять, как быстро функция возрастает или убывает.

Рассмотрим параболу $y = x^2$.

1. Найдём производную:
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$
2. Пусть точка $x_0 = 1$. Тогда производная:
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

   Это означает, что в точке $x = 1$ наклон касательной к параболе равен 2.

Представим, что парабола $y = x^2$ описывает путь машины, зависящий от времени $x$. Производная в точке $x = 1$ показывает скорость машины в этот момент времени.

- При $x = 1$, путь машины $y = 1^2 = 1$ метр.
- Скорость машины в этот момент равна:
$$f'(1) = 2\,\text{м/с}.$$

Таким образом, в момент времени $x = 1$ машина движется со скоростью 2 метра в секунду.

## Общая производная функции

Производная функции одной переменной в точке — это численная характеристика, которая описывает, с какой скоростью функция изменяется вблизи этой точки. Она определяется через предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Формула для производной напоминает расчёт средней скорости движения машины.

1. Средняя скорость машины на каком-то промежутке времени:
   Пусть машина движется по прямой. Расстояние, которое она проходит, описывается функцией $s(t)$, где $t$ — время. Тогда средняя скорость $v_{\text{средн}}$ на интервале времени $\Delta t$ равна:
   $$v_{\text{средн}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$
   Здесь:
   - $s(t+\Delta t)$ — положение машины через время $\Delta t$,
   - $s(t)$ — положение машины в начальный момент времени,
   - $\Delta t$ — длительность времени.
2. Переход к мгновенной скорости:
   Если мы хотим узнать скорость в конкретный момент времени $t$, а не усреднённую за какой-то промежуток, нужно сделать шаг $\Delta t$ настолько малым, что он ноль. Но на ноль нельзя делить, тут нам помогает чит код с лимитами, напищем, что промежуток времени "стремится"к нулю.
   $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$
   Это — определение производной функции $s(t)$ по переменной $t$.
3. Для произвольной функции $f(x)$ производная $f'(x)$ вычисляется аналогично:
   - $\Delta x$ — это «малое изменение» аргумента $x$,
   - $f(x+\Delta x) - f(x)$ — это изменение функции, соответствующее изменению аргумента.

   Производная $f'(x)$ показывает, насколько быстро $f(x)$ меняется при изменении $x$, если это изменение становится бесконечно малым ($\Delta x \to 0$).

## Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Найдём её производную в точке $x = 1$ через предел:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Подставляем функцию:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Раскрываем квадрат:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Сокращаем $x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Выносим $\Delta x$ за скобки в числителе:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Сокращаем $\Delta x$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x).$$

Когда $\Delta x \to 0$, остаётся:

$$f'(x) = 2x.$$

Скорость в точке $x = 1$:

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$$

## Как использовать на практике?

Производная $f'(x)$ показывает скорость изменения функции:

- Если $f'(x) > 0$, функция возрастает, то есть значения $f(x)$ увеличиваются при увеличении $x$.
- Если $f'(x) < 0$, функция убывает, то есть значения $f(x)$ уменьшаются при увеличении $x$.
- Если $f'(x) = 0$, функция «останавливается» — это может быть минимум, максимум или точка перегиба. Перебираем все такие точки, когда $f'(x) = 0$, то есть по сути решаем это уравнение и находим все $x$, при которых $f(x)$ может достигать минимума. Не все кандидаты нам нужны, но один из них это минимум.

## Линейная регрессия

У нас есть данные о ценах домов ($y$) в зависимости от количества комнат ($x$). Пример данных:

| Количество комнат ($x$) | Цена дома ($y$) (тыс. долларов) |
|---|---|
| 1 | 150 |
| 2 | 200 |
| 3 | 250 |
| 4 | 300 |

Необходимо построить модель линейной регрессии, которая выражается уравнением:

$$y = kx + b,$$

где:

- $y$ — предсказанная цена дома (в тыс. долларов),
- $x$ — количество комнат,
- $k$ — коэффициент, показывающий, как цена дома изменяется с увеличением количества комнат,
- $b$ — базовая цена дома при $x = 0$.

Цель задачи: найти коэффициенты $k$ и $b$, чтобы минимизировать разницу между предсказанной ценой ($y_{\text{предсказанное}}$) и реальной ценой ($y_{\text{реальное}}$) на всей выборке.

## Решение

Функция стоимости, которая оценивает среднеквадратичную ошибку между предсказанными и реальными ценами домов (по идее мы должны брать сумму модулей разниц, но такие производные запарно считать, поэтому берем квадраты, потому что они похожи):

$$J(k,b) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left((kx_i + b) - y_i\right)^2,$$

где $m$ — количество домов.

Для минимизации вычислим частные производные функции стоимости:

$$\frac{\partial J}{\partial k} = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left((kx_i + b) - y_i\right)x_i,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\left((kx_i + b) - y_i\right).$$

## Решение системы

Распишем каждое уравнение:

1. Уравнение для $b$:

$$\sum_{i=1}^{m}(kx_i+b)=\sum_{i=1}^{m}y_i.$$

Разделим обе части на $m$:

$$k\bar{x}+b=\bar{y},$$

где:

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i, \quad \bar{y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}y_i$$

— средние значения $x$ и $y$.

2. Уравнение для $k$:

$$\sum_{i=1}^{m}\left((kx_i+b)-y_i\right)x_i=0.$$

Подставим $b=\bar{y}-k\bar{x}$ из первого уравнения:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(kx_i+(\bar{y}-k\bar{x})-y_i\right)x_i=0.$$

Раскроем скобки:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(k(x_i-\bar{x})+(\bar{y}-y_i)\right)x_i=0.$$

Разделим и упростим:

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Таким образом, значения $k$ и $b$ вычисляются по следующим формулам:

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2},$$

$$b=\bar{y}-k\bar{x}.$$

## Пример расчёта

Для данных:

$$x=[1,2,3,4], \quad y=[150,200,250,300],$$

вычисляем средние значения:

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5, \quad \bar{y}=\frac{150+200+250+300}{4}=225.$$

1. Находим $k$:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Считаем отклонения:

$$(x_i - \bar{x}) = [-1.5, -0.5, 0.5, 1.5], \quad (y_i - \bar{y}) = [-75, -25, 25, 75].$$

Вычисляем произведения и квадраты:

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-1.5)(-75) + (-0.5)(-25) + (0.5)(25) + (1.5)(75) = 475,$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 = 5.$$

$$k = \frac{475}{5} = 95.$$

2. Находим $b$:

$$b = \bar{y} - k\bar{x} = 225 - 95 \cdot 2.5 = -12.5.$$

## Итоговая модель

Уравнение линейной регрессии:

$$y = 95x - 12.5.$$

Теперь для любого количества комнат $x$ можно предсказать цену дома $y$. Например: - Для дома с 5 комнатами ($x = 5$):

$$y = 95 \cdot 5 - 12.5 = 462.5\,\text{тыс. долларов.}$$

## Реализация линейной регресии на чистом python

Вводится n, в следующих n строках вводятся координаты точек x, y через запятую Выведите k и b из уравнения $y = kx + b$

```python

n = int(input())
data = []
for _ in range(n):
    x, y = map(float, input().split())
    data.append([x, y])

sum_xy = 0
sum_x = 0
sum_y = 0
sum_x_2 = 0
for row in data:
    sum_xy += row[0] * row[1]
    sum_x += row[0]
    sum_y += row[1]
    sum_x_2 += row[0]**2

k = (n * sum_xy - sum_x*sum_y) / (n*sum_x_2 - sum_x ** 2)
b = (sum_y - k*sum_x) / n

print(k, b)
```